REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 65. Agosto 2022
Páginas 1-9

Estimulemos el pensamiento matemático, a partir de un problema con el índice de masa corporal

Uldarico Malaspina

Resumen	En este problema se pide analizar la posibilidad que la media aritmética de los índices de masa corporal (IMC) de los integrantes de un grupo de personas se mantenga en un rango determinado, al efectuarse el cambio de uno de los integrantes del grupo por otra persona cuya masa es mayor que la de la persona reemplazada. Se usa el hecho de no conocerse el número de integrantes del grupo, ni el IMC de estos, para estimular el pensamiento matemático mediante la construcción y análisis de casos particulares que, a su vez, dan elementos para un análisis general. Se incluye una mirada al problema usando funciones de dos variables y se concluye con algunos comentarios didáctico-matemáticos. **Palabras clave**: media aritmética; pensamiento matemático; particularización; generalización; función de dos variables.
Abstract	In this problem it is required to analyze the possibility that the arithmetic mean of the body mass index (BMI) of the members of a group of people remains within a certain range, when changing one of the members of the group by another person whose mass is greater than that of the replaced person. The fact of not knowing the number of members of the group, nor their BMI, is used to stimulate mathematical thinking through the construction and analysis of particular cases that, in turn, provide elements for a general analysis. A look at the problem using two variables functions is included and it is concluded with some didactic-mathematical comments. **Keywords**: arithmetic mean; mathematical thinking; particularization; generalization; two variables function.
Resumo	Neste problema, solicita-se analisar a possibilidade de que a média aritmética do índice de massa corporal (IMC) dos membros de um grupo de pessoas permaneça dentro de um determinado intervalo, ao mudar um dos membros do grupo por outra pessoa cuja massa é maior que a da pessoa substituída. O fato de não saber o número de integrantes do grupo, nem seu IMC, serve para estimular o pensamento matemático por meio da construção e análise de casos particulares que, por sua vez, fornecem elementos para uma análise geral. Um olhar sobre o problema usando funções de duas variáveis é incluído e é concluído com alguns comentários didático-matemáticos. **Palavras-chave:** média aritmética; pensamento matemático; particularização; generalização; função de duas variáveis.

1. Problema

La media aritmética de los índices de masa corporal (IMC) de los integrantes un grupo de deportistas es 24,8 kg/m² y en consecuencia está en el rango normal (entre 18,5 y 24,9 kg/m²). Josefina es parte de ese grupo, pero ella sale del grupo por motivos de salud y, para mantener el número de integrantes del grupo, es reemplazada por otro deportista cuya masa es 5 kg mayor que la de Josefina. ¿Es posible que la media aritmética de los IMC de los integrantes del nuevo grupo se mantenga en el rango normal? Justificar.

Este problema es muy similar al que trabajamos, por iniciativa del profesor Max Ponce Mariluz, en un taller virtual con profesores de secundaria de la región Huancavelica – Perú. El problema permite formular diversas actividades tratando diversos contenidos matemáticos, así como estimular el pensamiento matemático analizando casos particulares y haciendo afirmaciones de carácter general.

Una actividad que surge de manera natural, es hacer averiguaciones para tener más conocimiento de lo que es el índice de masa corporal (al que nos referiremos simplemente por IMC). Una búsqueda por Internet[1] nos aclara que es un indicador importante para el cuidado de la salud de una persona, que se obtiene con información de su peso expresado en kilogramos[2] y su talla expresada en metros. Para obtener el IMC de una persona cuya masa es 50 kg y cuya talla es 1,6 m, se divide 50 entre el cuadrado de 1,6. Así, el IMC de tal persona es 19,53 kg/m².

En el taller que desarrollamos con profesores y también en este artículo, usaremos como referencia la Tabla 1, que es usada con frecuencia y que muestra diversos rangos de IMC, relacionados con “bajo peso”, “peso normal”, “sobrepeso” y distintos niveles de obesidad:

Clasificación del IMC	IMC
Bajo peso	< 18.5 Kg/m2
Normal	18.5 - 24.9 Kg/m2
Sobrepeso	25.0 -29.9 Kg/m2
Obesidad	30.0 - 34.5 Kg/m2
Obesidad grado 2	35.0 -39.9 Kg/m2
Obesidad grado 3	>40 Kg/m2

Tabla 1

En Internet hay tablas y hasta calculadoras que facilitan la obtención del IMC. Por cierto, esencialmente se trata de aplicar la fórmula

[1] Por ejemplo: http://tuendocrinologo.com/site/nutricion/calculadora.html
[2] En rigor, debería decirse su masa expresada en kilogramos. El peso es la fuerza de atracción de la tierra sobre cualquier objeto, y se mide en newtons.

$$IMC = \frac{M}{T^2} \quad (1)$$

donde *M* representa la masa de una persona expresada en kg y *T* representa su talla expresada en metros. Es claro que las unidades en las que se mide el IMC es kg/m^2, pero usualmente se prescinde de esta especificación.

2. Examinemos el problema propuesto

No se indica el número de integrantes del grupo, pero eso no debería llevar a concluir que el problema no se puede resolver.

Construyamos un caso particular de 4 integrantes (A, B, C y D) que tenga similitud con el problema propuesto. Asignemos un IMC a cada integrante del grupo, de modo que la media aritmética de los 4 sea 24,8. Es un simpático ejercicio de tanteo inteligente, que puede hacerse con operaciones aritméticas, teniendo como base el número 24,8. Evidentemente, hay muchas posibilidades y en la siguiente tabla se muestra una de ellas:

Personas	IMC
A	27,0
B	23,9
C	27,7
D	20,6

Tabla 2

Se puede verificar que la media aritmética de estos IMC es 24,8:

$$\frac{27+23{,}9+27{,}7+20{,}6}{4} = 24{,}8$$

Para seguir con la similitud con el problema dado, supongamos que se retira A, y es reemplazado por E, de quien solo sabemos que su masa es 5 kg más que la de A. Es fácil imaginar que esto puede alterar la media aritmética. En el taller que desarrollamos, algunos docentes en una primera mirada, simplemente añadieron 5 al numerador. De esa manera, en nuestro caso particular, la supuesta nueva media aritmética resulta $\frac{(27+5)+\,23{,}9+27{,}7+20{,}6}{4} = 26{,}05$ que está fuera del rango normal.

Sin embargo, pronto se dieron cuenta que esto no es correcto, pues el incremento de 5 kilos del nuevo integrante E, no significa que su IMC se incrementará en 5 unidades, pues, como vimos en (1), el IMC está definido en función de dos variables (la masa *M* y la talla *T*) y la información del incremento es solo respecto a una de las variables. Entonces, es importante preguntarse ¿cómo puede variar el IMC de E, respecto al IMC de A, sabiendo que su masa es mayor que la de A en 5 kilos? La respuesta depende de la talla de E respecto a la talla de A. Podría ocurrir que E sea de la misma talla que A; que E sea de una talla menor que la talla de A; o que E sea de una talla mayor que la talla de A. Como la masa de E es 5 kilos más que la de A, si ocurre que ambas tienen la misma talla, parece natural conjeturar que el IMC de E será mayor que el IMC de A.

3. Algunos casos particulares

Podemos construir algunos casos particulares, asignando masas y tallas a A, B, C y D, de modo que tengan los IMC que hemos considerado en la Tabla 2. Evidentemente es un ejercicio en el que será de gran ayuda usar una calculadora, o algún otro recurso que nos brinda la tecnología, como una hoja Excel. Lo importante es usar la estimación, el redondeo, resolver algunas ecuaciones sencillas y hacer evidente que conociendo el IMC de una persona, no es posible determinar de manera única la masa y la talla de esa persona. Esto resultará de los diferentes valores que pueden tener las columnas de la masa y la talla en tablas construidas por distintas personas o por distintos grupos. A continuación, una de las posibles tablas:

Personas	Masa en kg	Talla en m	(Talla en m)^2	IMC
A	60,8	1,50	2,25	27,0
B	64,3	1,64	2,69	23,9
C	66,5	1,55	2,40	27,7
D	52,7	1,60	2,56	20,6

Tabla 3

Entonces, de acuerdo a estos datos, E tendría una masa de 65,8 kg (5 kg más que A) y si es de la misma talla que A, su IMC sería $\frac{65,8}{2,25} = 29,2$, que – evidentemente, y tal como ya lo habíamos adelantado – es mayor que el IMC de A y en consecuencia subiría la media aritmética del IMC de los cuatro integrantes del grupo, con E en lugar de A. Se puede verificar que ahora tal media aritmética sería 25,35 y, en este caso, sale del rango normal.

Si la talla de E es menor que la talla de A, al tener una masa mayor en 5 kg que la masa de A, también es natural conjeturar que el IMC de E será mayor que el IMC de A. Con los datos de la Tabla 3, supongamos que la talla de E es 1,48 m. Entonces, con esta talla y con 65,8 kg de masa, su IMC sería $\frac{65,8}{2,19} = 30,05$. Como era de esperarse, este IMC es mayor que el de A; inclusive mayor que en el caso anterior. En consecuencia, la media aritmética de los IMC de los integrantes del grupo será también mayor que antes del cambio de A por E y mayor que en el caso anterior; por consiguiente, también en este caso, estará fuera del rango normal.

Nos falta examinar un caso en el que la talla de E es mayor que la talla de A. Supongamos que la talla de E es 1,64 m; entonces, con esta talla y con 65,8 kg de masa, su IMC sería $\frac{65,8}{2,69} = 24,46$. Como este IMC es menor que 27, que es el IMC de A, podemos adelantar que disminuirá la media aritmética del grupo, con E en lugar de A, y en consecuencia se mantendrá en el rango normal, pues tampoco disminuirá tanto como para salir del rango por la cota inferior. En efecto, se puede verificar que la nueva media aritmética del IMC del grupo sería 24,17.

Con la construcción hecha, ya tenemos justificación clara para responder afirmativamente a la pregunta del problema dado, pues vemos un caso específico en el que, a pesar de que E tiene 5 kg más de masa que A, su talla mayor que la de A influye para que su IMC sea menor que el IMC de A y finalmente, la media aritmética de los IMC de los integrantes del nuevo grupo (con E en lugar de A) se mantenga en el rango normal.

3. Cuidado con la generalización

Entonces ¿siempre que E sea más alta que A, la media aritmética del IMC del grupo, con E en lugar de A, se mantendrá en el rango normal? Hay que tener cuidado si se pretende generalizar a partir de un caso particular. Por ejemplo, si la talla de E es 1,52m – en consecuencia, E es más alta que A – su IMC sería $\frac{65{,}8}{2{,}31} = 28{,}48$. Es claro que este IMC es mayor que el IMC de A y ahora la media aritmética del grupo sería 25,17 , que sale del rango normal y ya está en el "rango de sobrepeso", según la Tabla 1.

Adoptemos algunos símbolos para hacer un análisis general a partir de lo examinado en los ejemplos mostrados.

- Índice de masa corporal de A = $IMC_A = \frac{M_A}{T_A^2}$, con M_A y T_A masa y talla de A, respectivamente.
- Índice de masa corporal de E = $IMC_E = \frac{M_E}{T_E^2}$, con M_E y T_E masa y talla de E, respectivamente.
- Tenemos como información que $M_E = M_A + 5$; entonces, para todos los casos

$$IMC_E = \frac{M_E}{T_E^2} = \frac{M_A + 5}{T_E^2} \qquad (2)$$

Y debemos comparar IMC_E con IMC_A ; o sea $\frac{M_A + 5}{T_E^2}$ con $\frac{M_A}{T_A^2}$

Ahora consideremos los casos posibles:

a) $T_E = T_A$. (A y E de la misma talla) En este caso, en (2) podemos cambiar T_E por T_A y entonces

$$IMC_E = \frac{M_A + 5}{T_E^2} = \frac{M_A + 5}{T_A^2} = \frac{M_A}{T_A^2} + \frac{5}{T_A^2} = IMC_A + \frac{5}{T_A^2}$$

Y vemos claramente que IMC_E es mayor que IMC_A (inclusive, podemos ver que es mayor en $\frac{5}{T_A^2}$ unidades). De una manera sencilla, podemos decir que la fracción que expresa el IMC de E, es la fracción modificada del IMC de A, en la que solo el numerador se ha incrementado, lo cual hace que la fracción así modificada sea mayor que la fracción sin el incremento. Podemos concluir entonces que, en este caso, el IMC de E es mayor que el IMC de A. No sabemos exactamente en cuánto excederá el IMC de E al IMC de A – porque no conocemos la talla de A – y en consecuencia no podemos asegurar que el nuevo promedio de los IMC se mantendrá en el rango normal o excederá a su cota superior.

b) $T_E < T_A$. (E es más baja que A) Como E tiene 5 kilos más de masa que A, se puede afirmar, intuitivamente, que el IMC de E es mayor que el IMC de A, pero los símbolos nos ayudarán a tener claridad sobre la verdad de esta afirmación.

Al observar las fracciones $\frac{M_A + 5}{T_E^2}$ y $\frac{M_A}{T_A^2}$, advertimos que la primera tiene numerador mayor que la segunda y además denominador menor que la segunda; o sea, en la primera fracción, un número mayor que M_A se divide entre un número menor que T_A^2 ; también podemos decir que la primera fracción es mayor que la segunda fracción, porque su numerador es mayor y su denominador es menor. Así, concluimos que, en este caso, el IMC de E es mayor que el IMC de A. No sabemos en cuánto excederá el IMC de E al IMC de A, así que no podemos concluir si la media aritmética de los IMC de los cuatro integrantes del nuevo grupo se mantiene en el rango normal o sale de él.

c) $T_E > T_A$. (E es más alta que A). Al observar las fracciones $\frac{M_A + 5}{T_E^2}$ y $\frac{M_A}{T_A^2}$, advertimos que la primera tiene numerador mayor que la segunda y también denominador mayor que la segunda; o sea, en la primera fracción, un número mayor que M_A se divide entre un número mayor que T_A^2. En consecuencia, no podemos afirmar si $\frac{M_A + 5}{T_E^2}$ es mayor, menor, o igual que $\frac{M_A}{T_A^2}$ y, por consiguiente, tampoco podemos afirmar si la media aritmética de los IMC de los cuatro integrantes del grupo, con E en lugar de A, se mantiene en el rango normal o sale de él.

Notemos que para este análisis no ha sido necesario conocer el número de integrantes del grupo ni datos específicos de masa y talla de los integrantes, salvo la información que se da en el problema, que el reemplazante (al que hemos llamado E) tiene 5 kg más de masa que el reemplazado (al que hemos llamado A).

Habiendo analizado los tres casos, la respuesta a la pregunta del problema es que sí es posible que se mantenga en el rango normal la media aritmética de los IMC del grupo en el que un integrante ha sido reemplazado por otro que tiene 5 kg más de masa, pero esto no necesariamente ocurrirá. Ciertamente, lo contundente es mostrar un ejemplo y el caso $T_E > T_A$ podría ser el más adecuado para construirlo, pues da la posibilidad que $IMC_E < IMC_A$. En la sección anterior, hemos mostrado un ejemplo, en este caso, en el que la nueva media aritmética se mantiene en el rango normal; y al inicio de esta sección hemos mostrado un ejemplo, también en este caso, en el que la nueva media aritmética está fuera del rango normal.

4. Una mirada usando funciones

Recordemos que el IMC de una persona, depende de su talla y de su masa. Así, en (1) escribimos $IMC = \frac{M}{T^2}$ haciendo explícitas las variables T y M y la forma cómo están relacionadas. Podemos decir, entonces, que el IMC de una persona es una función de dos variables (T y M), y escribir:

$$IMC = IMC(T,M) = \frac{M}{T^2} \qquad (2)$$

Así, asignando diversos valores a T y M, obtenemos los correspondientes valores del IMC. Evidentemente, por el contexto en el que se ha definido esta función, T no puede tomar el valor cero; más aún, M tampoco y, según el grupo de personas, podrían considerarse intervalos en los que varíen T y M. Por ejemplo

$$1{,}4 \leq T \leq 1{,}90\ ;\ 45 \leq M \leq 80 \qquad (3)$$

En el problema dado, aunque no se diga explícitamente su valor, cada persona tiene su IMC, calculado con los correspondientes valores de T y de M. Al hacerse el cambio de A por E, el valor de M cambia por otro que es 5 unidades mayor que el valor correspondiente al de A y no se dice nada de los valores de T correspondientes a E y a A. ¿Será posible que, variando M, se mantenga el IMC? Una pregunta de carácter general, relacionada con esta situación es ¿qué valores pueden tomar T y M, de modo que en todos los casos el IMC sea el mismo? Esto equivale a preguntarse ¿cómo es el conjunto de valores de T y M, tal que el IMC sea el mismo? En un análisis general podemos llamar K a tal IMC, pero para concretar, podemos usar, sin pérdida de generalidad, K = 20. Entonces, debemos examinar el siguiente conjunto:

$$\{(T,M) tal\ que\ IMC(T,M) = 20\} \qquad (4)$$

O sea

$$\left\{(T,M) tal\ que\ \frac{M}{T^2} = 20\right\}$$

Es decir:

$$\{(T, M) tal\ que\ M = 20T^2\}$$

Podemos afirmar ahora que las coordenadas de todos los puntos del arco de parábola, cuya ecuación es $M = 20T^2$, que se encuentren en la región rectangular delimitada por (3), son valores de T y M con los cuales el IMC es 20, lo cual significa que hay infinitas posibilidades para valores de T y M que den el mismo IMC.

Algo más, quienes tienen conocimientos más avanzados de funciones de dos variables, pueden ver el conjunto definido en (4) como la curva de nivel 20 de la función de dos variables expresada por $IMC(T,M) = \frac{M}{T^2}$. Haciendo un mapa de algunas curvas de nivel, en la región dada por (3), y trazando en él un segmento horizontal, sus intersecciones con las curvas de nivel visualizarán los diversos IMC que pueden corresponder a un mismo valor de M. Similarmente, trazando un segmento vertical, sus intersecciones con las curvas de nivel visualizarán los diversos IMC que pueden corresponder a un mismo valor de T. Ciertamente, usar un software como *Mathematica* o *GeoGebra*, ayudará mucho para estas visualizaciones.

5. Comentarios

El problema y la discusión expuesta son una muestra de lo mucho que se puede aprender/enseñar, tratando temas vinculados no solo a la matemática misma sino a otros aspectos de la realidad, inclusive vinculados con la salud. El problema tiene un requerimiento cualitativo en relación al IMC de un grupo de personas y no da como información el número de integrantes del grupo, ni el IMC de alguno de ellos, lo cual lleva a estimular el pensamiento matemático mediante conjeturas y construcción de ejemplos, y a examinar más allá de casos particulares, considerando, en el fondo, una función de dos variables.

Lo expuesto brinda la ocasión de relacionar lo particular con lo general y de tener claro que, a partir de cierta información dada, hay casos en los que algo puede ocurrir, pero que no necesariamente ocurrirá. Al respecto, es recomendable leer Font y Contreras (2009) y Malaspina (2010).

La construcción de ejemplos numéricos brinda oportunidades también para hacer tanteos inteligentes, aproximaciones y redondeos, así como para usar reflexivamente recursos tecnológicos como calculadoras, hojas Excel, o algún software matemático.

La forma en que se ha abordado el problema propuesto, muestra una interrelación entre tres competencias consideradas en el Currículo Nacional de Educación Básica Regular, vigente en el Perú. Competencia 23: Resuelve problemas de cantidad; Competencia 24: Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio; y Competencia 25: Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre

Por lo dicho anteriormente, es muy importante que los docentes en formación y en servicio vivan experiencias de afrontar y crear este tipo de problemas, como oportunidades tanto para estimular su pensamiento matemático como para evidenciar interrelaciones entre competencias consideradas en el currículo y así estar mejor preparados para trabajar con sus estudiantes.

Bibliografía

Font, V. y Contreras, A. (2008). The problem of the particular and its relation to the general in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 69*, 33-52.

Malaspina, U. (2010). De lo particular a lo general, usando grafos. *UNIÓN - Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 21*, 165 - 172

Autor: Malaspina Jurado, Uldarico

Doctor en Ciencias, Profesor Emérito de la Pontificia Universidad Católica del Perú. Expositor en foros internacionales de Educación Matemática. Autor y coautor de libros y artículos de Matemática y Educación Matemática. Académico de Número de la Academia Nacional de Ciencias del Perú. Palmas Magisteriales - Grado Amauta