UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 39. Septiembre 2014
páginas 163-170

Ideas para enseñar: Repensando la enseñanza de los números negativos en la escuela secundaria

Patricia Detzel, Ethel Barrio, Analía Petich, Rosa Martinez

1. Introducción

Este trabajo se enmarca en un proyecto de investigación - dependiente de la Universidad Nacional del Comahue, Argentina- que pretende construir conjuntamente, investigadores y profesores, un modo posible donde la Didáctica de la Matemática se convierta en un marco posible para que los docentes puedan pensar sus clases de matemática. A partir de encuentros periódicos pretendemos crear un ambiente de estudio y producción de conocimiento matemático-didáctico para hacer más visible el complejo marco de decisiones del docente en su tarea diaria. Estamos convencidos que los investigadores necesitamos conocer más sobre las necesidades y desafíos que enfrentan los docentes en su trabajo, intentando encontrar posibles nexos entre la Didáctica de la Matemática y el quehacer docente. Autores como Bednarz (1999), Desgagné (2001) y Anadón (2001, 2008), destacan la importancia de incorporar a los docentes de las escuelas medias a los grupos de estudio para realizar investigaciones “con” ellos más que “sobre” ellos.

En este contexto, nos propusimos adaptar–en forma colaborativa profesores e investigadores– una propuesta de enseñanza en relación a la introducción de los números negativos en un entorno algebraico, para ser puesta en aula con alumnos de primer año de la escuela secundaria. En este trabajo mostraremos parte de ese recorrido, retos y desafíos.

Se optó por estudiar la propuesta de Cid, E. & Ruiz Munzón, (2011) para introducir los números negativos en un contexto algebraico. Las actividades de estudio e investigación que presenta están divididas en sesiones y han sido adaptadas en forma colaborativa, entre docentes e investigadores, para ser implementadas en un primer año del Colegio de Educación Media Nº15, de la ciudad de Cipolletti, provincia de Río Negro.

Recorrido de la experiencia

En el año 2012, junto a un grupo de docentes de matemática de diferentes escuelas secundarias, surge de común acuerdo el estudio de la enseñanza de los números negativos. Investigadores y profesores aceptamos el desafío y compartimos la responsabilidad de involucrarnos en un proceso de investigación acerca de una problemática particular del quehacer docente. Durante ese año se llevaron a cabo 18 encuentros quincenales con una duración de tres horas y media cada uno y una reunión semanal con el equipo extensionista. En el 2013, se suman docentes e investigadores al trabajo colaborativo para (re)pensar ajustes a la propuesta con el fin de llevar a cabo su implementación. El camino que emprendimos supone transitar entre lo que se sabe y se puede enseñar, y entre lo que se desea enseñar pero no se sabe y es necesario aprender. Planificamos dos meses para la puesta en aula, con una carga horaria de cinco horas cátedra semanales. Durante ese tiempo, decidimos realizar una observación participante de las clases a cargo de dos personas, de modo tal que alguna de ellas sostuviera su presencia para garantizar la continuidad entre las clases. En forma simultánea, trabajamos en un espacio de acompañamiento semanal con el docente a cargo de poner en marcha la propuesta. Pensamos estos encuentros como una oportunidad de adentrarnos como grupo en la comprensión y definición de tareas a analizar, discutir, generar acciones que fueran animando y acompañando la transformación de las ideas en acciones y las acciones en ideas, en un proceso de adaptabilidad. La producción e intercambios de las clases y de los encuentros se registran de modo minucioso y sistemático, documentando los momentos de trabajo a través de registros escritos y de grabaciones.

En este proceso, a partir del análisis de las actividades de la propuesta original, se generó una dinámica de reflexión, dando lugar a una reapropiación personal de esas situaciones, a propósito de interpretaciones que se hicieron y experiencias que se compartieron propiciando que cada uno explicitara su propio punto de vista. Esos puntos de vistas que se discutieron vinieron desde distintos lugares: por una parte, los investigadores con su marco de referencia subyacente y sus interrogaciones; por otro, los docentes a través de su práctica, y las restricciones y recursos de su acción específica. En este sentido, se posibilita la elaboración de un repertorio común y compartido.

Una propuesta para la enseñanza de los negativos diferente

En general los números negativos se introducen en los primeros años de la escuela media (alumnos de 12 a 14 años). Esta introducción se realiza en un entorno aritmético, y se circunscribe inicialmente a los números enteros.

Para justificar las reglas de cálculo de estos números, se recurre a recursos correspondientes a ciertos *modelos concretos* (deudas y haberes o pérdidas y ganancias, juegos con puntuaciones positivas o negativas, personas que entran o salen de un recinto o que recorren un camino con dos sentidos, temperaturas, altitudes por encima o debajo del nivel del mar, etc.) que actúan por analogía. Una vez que los alumnos se han familiarizado con estas reglas, se inicia el estudio del álgebra. (Cid, Bolea 2007). Esta forma de hacer supone una inversión del proceso habitual de *modelización matemática*, en el que el modelo matemático es un medio para obtener información sobre un sistema intra o extra matemático que se constituye en objeto de estudio. En este sentido, en la escuela media, cuando el objeto de estudio es el número entero, generalmente, el medio para estudiarlo son ciertos sistemas constituidos por objetos pertenecientes al mundo sensible y las acciones que se ejercen sobre ellos; es decir, los *modelos concretos*. Sólo cuando se considera completa su introducción, recupera parcialmente su función como modelo matemático de un sistema y se presentan a los alumnos sus “aplicaciones”.

Somos conscientes que este recorrido descripto no logra que los alumnos puedan dar sentido a los números positivos y negativos, lo que creemos que explicaría las dificultades que se ponen en evidencia con el manejo de los signos.

En este sentido, elegimos esta propuesta que tiene por objetivo la introducción simultánea de los números negativos y del álgebra escolar como instrumento de *modelización algebraica* (Chevallard, 1989; Gascón, 1993-94; Bolea 2003). Aceptamos considerarla como un insumo para (re)pensar la enseñanza de los números negativos en la escuela secundaria porque atiende a las siguientes cuestiones:

- ✓ "*la razón de ser de estos números*" se encuentra en el cálculo algebraico, no en el aritmético.
- ✓ el "*hacer matemática*" está considerado como "*actividad de modelización".*

Nos parece importante destacar los puntos claves que debimos asumir como grupo de estudio y poner en tensión con nuestras concepciones:

- *La presentación de las notaciones.* Se comienza con las notaciones incompletas, es decir, las notaciones en las que se han suprimido los signos "+" que indican operación binaria (por ejemplo, – 4 – 2) para terminar presentando las notaciones completas (por ejemplo, (–4) + (– 2)). En general, se hace el recorrido inverso que va de la notación completa a la incompleta.
- *Los significados de los signos "+" y "-".* Se consideran como objeto de estudio y permiten iniciar un trabajo algebraico cuando aún no se dispone de las reglas de los signos. Se trabajan en forma sucesiva y minuciosa al operar en principio como sumandos y sustraendos -en lugar de números- para luego aceptarlos como tales. Es decir, ante la expresión $m - 8 - 2$ hay que entender que a m se le tiene que "restar 8" y luego "restar 2", lo que es equivalente a "restar 10". En general, para resolver dicha expresión se recurre a que (– 8) + (– 2)= – 10.
- *La modelización algebraica*. Las tareas presentadas en la propuesta requieren de un *cálculo algebraico funcional*, es decir, un cálculo que exige una reflexión y toma de decisiones para poner en evidencia las propiedades del sistema modelizado. Las relaciones que existen entre los diferentes componentes del sistema dan lugar a expresiones algebraicas en las que intervienen letras, que pueden jugar un papel de incógnitas, parámetros o variables. Por ejemplo, la expresión algebraica $n - 2$ que da respuesta a una tarea determinada, se interpreta como "dos menos que al principio". En general, esta expresión se suele interpretar como una traducción literal "un número menos dos".
- *Los programas de cálculo como objeto de estudio.* Esta propuesta exige detenerse en las equivalencias de las diferentes expresiones algebraicas. Este encadenamiento de las operaciones deriva en un trabajo descontextualizado propio del trabajo algebraico. La tarea de simplificación de expresiones algebraicas tiene su razón de ser en la economía y justificación del cálculo algebraico, no se presenta como técnica algorítmica. Ejemplo, $m - 8 - 2 = m - 10$.

Repensando la introducción de los números negativos: adaptabilidad de la propuesta

Nos interesó estudiar las condiciones bajo las cuales esta propuesta –producto de una investigación– se puede convertir en un insumo para la práctica docente. El análisis en conjunto, entre investigadores y profesores, de las actividades de la propuesta seleccionada proporcionó un escenario fértil de investigación sobre el proceso de adaptabilidad de la misma a las clases comunes. Analizar y estudiar esta propuesta nos colocó en un lugar de horizontalidad en el desarrollo del trabajo colectivo.

En esta adaptabilidad prevaleció la necesidad de habilitar una dinámica que permitiera problematizar el conocimiento a enseñar y hacer consciente el proceso de decisiones. Desmenuzar el repertorio de elecciones brinda conocimiento a los docentes que les permiten ampliar su margen de maniobra. Es nuestra intención poder ejemplificar en la ponencia sobre estas cuestiones; para ello haremos foco, específicamente, en dos tareas, como se detalla a continuación:

Tabla 1

PROPUESTA ORIGINAL	ADAPTABILIDAD DE LA PROPUESTA
Tarea 1. Laura se llevó sus tazos al colegio para jugar varias partidas. En la primera perdió 9 tazos y en la segunda ganó 7. ¿Cuántos tazos le quedaron después de jugar?	**Tarea 1.** Laura se llevó sus figuritas al colegio para jugar varias partidas. En la primera perdió 9 figuritas y en la segunda ganó 7. ¿Cuántas figuritas le quedaron después de jugar?

Como se puede observar en la adaptabilidad de este problema sólo se cambia la palabra tazos por figurita. Se decidió conservar los números en juego y se discutió en los encuentros los tipos de respuestas posibles por los alumnos:

D1: *En la tarea*1 *no necesariamente vamos a exigir que el alumno escriba la expresión. Con que lo deje expresado en forma coloquial alcanza ¿no?. Además es bueno dejar que cada alumno elija una cantidad inicial distinta y después analizar …vos elegiste 10 y llegaste a 8, otro eligió 30 y le quedaron 28 y así* […] *hacerles ver* [a los alumnos] *que en todos los casos independientemente de la cantidad elegida siempre tienen dos menos que al principio, que es lo que queremos destacar en este trabajo algebraico. ..* [E4 – 00:02:42]

Luego de la puesta en aula de esta tarea, en el grupo de estudio (E8) se reflexionaba:

C1: *En la tarea 1 ¿cómo anduvo este problema?*

C2: *Nosotros interveníamos para que ellos* [los alumnos] *hicieran más cuentas para que puedan ver la relación. Por ejemplo toma 16, hace las cuentas y le dio 14, toma el 102 y le da 100…*

C1: *Pero después de esos números, ellos se podían despegar de esos valores particulares?*

C2: *Intentamos ir llevándolos* [a los alumnos] *con preguntas a que puedan ver la "relación que había entre los números".*

C3: *No todos. Algunos hacían todas las cuentas para todos los casos*…

C2: *Juan gestionó en el pizarrón. Tomó distintos valores que le dieron los alumnos*… *luego comparan y algunos decían: "profe siempre le saco dos".*

D1: *Un alumnos puso* X *es figuritas y después escribió* X – 9 + 7 *y después reemplazó por* 20. […] *No alcanzamos en esta clase llegar a la expresión* X – 2.

C1: *La clase siguiente habría que pensar en números grandes pero que faciliten las cuentas o que facilite que se vea la relación, por ej 102 permite ver mejor la relación con 100, ó 109, porque restar 9 les cuesta…*[E8- 00:06:03].

En esta tarea estábamos abocados a que los alumnos puedan hallar la regularidad entre la cantidad inicial y la cantidad final. Nos llevó un tiempo poder reconocer la importancia que tiene la escritura de la expresión x – 2, pues representa el modelo de "2 *menos que al inicio*". Es importante trabajar la relación entre las expresiones: "*dos menos que antes*", "*dos menos que al principio*", $x - 2$. Por otro lado, reflexionar acerca de la equivalencia entre $x - 9 + 7$ y $x + 2$.

En relación a la adaptabilidad de la tarea 2, además de cambiar el nombre de las ciudades, se decidió presentarla en dos incisos y en tiempos diferentes. Es decir, una vez resuelto por los alumnos el inciso a) se les hizo entrega del inciso b). Se muestran a continuación estos cambios:

Tabla 2

PROPUESTA ORIGINAL

Tarea 2. Un tren sale de Barcelona con cierto número de pasajeros y llega a Gerona después de hacer dos paradas. En la primera parada, bajan 15 y suben 12 pasajeros; en la segunda parada, bajan 38 y suben 42 pasajeros. ¿Con cuántos pasajeros llegó el tren a Gerona?

Completa las tablas siguientes:

N° Inicial de Pasajeros	N° Final de Pasajeros
427	
1582	
a	

N° Inicial de Pasajeros	N° Final de Pasajeros
	45
	876
	c

ADAPTABILIDAD DE LA PROPUESTA

Tarea 2. Un tren sale de Lanús con cierto número de pasajeros y llega a Lomas de Zamora después de hacer dos paradas. En la primera parada, bajan 15 y suben 12 pasajeros; en la segunda parada, bajan 38 y suben 42 pasajeros.

a) ¿Con cuántos pasajeros llegó el tren a Lomas de Zamora?

b) Completa las tablas siguientes:

N° Inicial de Pasajeros	N° Final de Pasajeros
427	
1582	
A	

N° Inicial de Pasajeros	N° Final de Pasajeros
	45
	876
	C

En el grupo de estudio (docentes D_i e investigadores C_i) discutíamos cómo correr a los alumnos de un trabajo numérico para acercarlos más a un trabajo algebraico y que surgiera, por parte de ellos, la necesidad de la letra. Estuvo presente en varios encuentros el rol que cumplía la tabla en esta Tarea. [E 5 II – 00:04:38]

D_1: *En la tarea* 2 *vamos a trabajar por separado la tabla, primero le damos a) y una vez que terminaron con la primer pregunta damos el b) para que trabajen con las tablas.*

C_2: *¿Te acordás que podía pasar en a) si no damos la tabla?*

D_1: *Sí. Puede ocurrir que algún alumno tome un valor con el que no le permita operar en la segunda parte. Entonces, bueno ahí le decimos que tome valores más grandes.*

En encuentros anteriores se había analizado que no dar la tabla da la posibilidad que los alumnos elijan valores con los cuales no pueden hacer los cálculos. Esto haría correr el riesgo de desviar la atención de la clase al análisis de "cuáles son los posibles valores que se pueden tomar como cantidad inicial". Esta cuestión no está presente con la tabla.

C_2: *Insisto ¿por qué decís que es más rico trabajar con la tabla después?*

D_2: *Si empiezan a trabajar con la tabla ya tienen la respuesta de a) y la letra está dada en la tabla.*

D1: *Con los valores de la tabla resuelven y todos llegan a los mismos resultados. En cambio con la pregunta a) cada uno* [alumno] *da un valor distinto y así se puede generalizar que independientemente de las cuentas de cada uno “siempre llega uno más que al principio”. Se da la posibilidad de que aparezcan distintos valores y de mostrar lo que pasa en todos los casos. Así rescatamos la relación de la cantidad inicial y cantidad final.* […] *Dejaríamos que lo digan en forma coloquial en a), en la tabla le exige escribir la expresión.*

D2: *Si hay una expresión del tipo m* – 15 + 12 – 38 + 48 *yo no le diría que simplifique…*

C5: *Pero ¿Cómo contesta entonces cuántos llegan?*

D2: *Yo creo que si nos ponemos a explicar por qué son equivalentes, nos adelantamos… […] Nos preguntamos si es pertinente trabajar la equivalencia…*

En este extracto mostramos el tipo de discusión que mantuvimos en los encuentros. Se reflexionó acerca de las condiciones de la tarea y las interacciones de los alumnos con los conocimientos en este caso “el sentido de la letra como variable”. Esta cuestión se vio reforzada en otro encuentro después de la clase y se analizó lo sucedido en el aula…

C2: *A vos* [uno de los docentes] *te gustó cómo quedó con la tabla después?*

D1: *Sí. A mí me pareció que estuvo bien porque ellos tomaron distintos valores como cantidades iníciales, dio lugar a discutir que no podían ser 24 pasajeros la cantidad inicial, y además era fácil ver que llegaba con uno más* […]

C1: *Vos decís que no poner la tabla permite a los alumnos trabajar más con la letra y no tanto con lo numérico. […] Ajá, creo que tiene razón, viste que los chicos sino sacan cuentas y hacen cálculos y se quedan ahí…* [E9-00:17:17]

C4: *¿cómo? ¿cómo?*

C1: *Juan decidió no dar la tabla al inicio eso trae como consecuencia que depende de los valores que tomen los chicos se desvía la discusión en “los posibles valores de la cantidad inicial”, cuestión que la tabla salva, por eso yo dudaba… Es cierto que se complican con la cantidad inicial pero favorece más el trabajo con la letra. Si tienen la tabla sólo sacan cuentas al principio y después la letra está dada, no surge cómo necesidad…*

D1: *Está bueno… los alumnos ya se dan cuenta que si tienen un dato desconocido uso una letra…* [E9- 00:20:00].

Después de las primeras clases y haciendo un balance de los logros de los alumnos, avanzamos sobre algunos hallazgos: “le dimos mucho peso al rol de la letra como variable y no nos detuvimos en un trabajo con la equivalencia de las expresiones”, que en términos de la propuesta sería el programa de cálculo.

En este contexto toma importancia, en la tarea 2, el hecho de presentar la tabla como parte del problema y no separada por incisos. Nuestro objeto de estudio es la equivalencia entre las expresiones resultantes en la resolución del problema entonces la tabla es el instrumento que daría lugar a distintas expresiones que dan cuenta de los cálculos realizados, posibilitando así trabajar la equivalencia entre ellas. Es decir, en la tercer fila podrían aparecer expresiones como: $a - 15 - 38 + 12 + 42$; $a - 53 + 54$, $a + 1$ a través de la simplificación de las expresiones algebraicas.

Al separar en dos incisos, los alumnos para responder a) llegan a la relación "uno más que al inicio", para responder b), en el tercer renglón, hacen una traducción del resultado que ya tienen, es decir, se debilita la posibilidad de otras expresiones que no sea a +1.

A modo de cierre

Al decidir qué enseñar y cómo hacerlo, el docente toma múltiples decisiones, entre un conjunto de opciones posibles. Así, para la elección de un camino a seguir, debe considerar alternativas de acción: en algunos casos, este proceso se realiza de forma implícita; en otros -como en este trabajo colaborativo- la reflexión sobre la práctica hace visible el conjunto de esas elecciones potenciales, abriendo un espacio de estudio para llevar adelante estas tareas.

Esta vivencia nos llevó a ampliar nuestras miradas y a realizar acciones que interrumpieron la rutina. Pudimos reconocer y extender nuestros marcos interpretativos, interpelando nuestras prácticas desde diferentes lugares.

Consideramos que el camino que recorrimos –investigadores y docentes- nos brindó aprendizajes que podrían integrarse en dos ideas que consideramos estructurantes: aprender a utilizar el conocimiento en situación y aprender a situarnos frente al conocimiento, al propio y al de los otros.

Bibliografía

Anadón, M y L´Hostie (2001), Nouvelles dynamiques de recherche en éducation. Les press de l´université Laval. Canadá.

Anadón, M. (2008), La investigación llamada "cualitativa": de la dinámica de su evolución a los innegables logros y los cuestionamientos presentes. Invest Educ Enferm. 26(2):198-211.

Bednarz, N. at col (1999), Un lien possible entre la recherche en didactique des mathématiques et la pratique de classe: la recherche collaborative. Actes du congrès de la commission internationale pour l'étude et l'amélioration de l'enseignement des mathématiques (CIEAEM). Neufchâtel, Suisse.

Bolea, P. (2003). El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares. Monografía del Seminario Matemático García de Galdeano, 29. Departamento de Matemáticas. Universidad de Zaragoza.

Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège Troisième partie: Perspectives curriculaires: voies d'attaque et problèmes didactiques. Petit X, 25, 5-38

Cid, E. & Ruiz Munzón, N. (2011). Actividades de estudio e investigación para introducir los números negativos en un entorno algebraico. En M. Bosch, J. Gascón, A. Ruiz Olarría, M. Artaud, A. Bronner, Y. Chevallard, G. Cirade, C. Ladage & M. Larguier (Eds.) (2011), *Un panorama de la TAD* (pp. 579-604). CRM Documents, vol. 10. Bellaterra (Barcelona): Centre de Recerca Matemàtica.

Desgagné, S. (2001a), La recherche collaborative: nouvelle dynamique de recherche en éducation, chap. 2, pp.51-76, á Anadón et L´Hostie (2001), Nouvelles dynamiques de recherche en éducation. Les press de l´université Laval. Canadá.

Desgagné, S. - Bednarz, N. Lebuis, P. – Poirier, L. et Couture, C. (2001b), L'approche collaborative de recherche en éducation : un rapport nouveau à établir entre recherche et formation, Revue des sciences de l'éducation vol. 27, n° 1, p. 33-64. ttp://id.erudit.org/iderudit/000305ar.

Gascón, J. (1993-1994). Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l'« arithmétique généralisée ». Petit x, 37, 43-63.